Секция «Математика и механика»

О функции мощности статистических тестов в многомерном гауссовом анализе

Кашицын Павел Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: pavel.kash@gmail.com

В многомерном гауссовом анализе широко используются критерии, являющиеся функциями от собственных значений случайной матрицы, распределенной по Уишарту (например, данные тесты используются в следующих областях многомерной статистики: многомерный анализ вариации (MANOVA), анализ канонических корреляций (CCA)).

Выбор собственных значений матрицы обусловлен тем, что в этом случае тестовые статистики не меняются при ортогональных преобразованиях, то есть не зависят от ортогональной системы координат.

В своей работе [5] Olkin и Perlman показали, что вектор, составленный из собственных значений центральной матрицы Уишарта, стохастически меньше вектора, составленного из собственных значений нецентральной матрицы Уишарта, что означает несмещенность критериев для проблемы MANOVA. Однако общая монотонность статистических критериев не была доказана.

В последующих работах [4] и [6] исследовалась совместная многомерная плотность распределения собственных значений нецентральной матрицы Уишарта, однако обобщающих результатов получено не было.

С использованием [1,2,3], нам удалось обобщить результаты работы [5] для случая всех критериев, зависящих от элементарных симметрических многочленов, а также отдельно показать стохастическую упорядоченность для максимального и минимального корня нецентральной матрицы Уишарта.

Теорема 1. Пусть $S(\Delta) \sim W_p(n, I_p, \Delta)$ — случайная матрица, имеющая нецентральное распределение Уишарта, где Δ — параметр нецентральности. Пусть $X(\Delta) = (\sigma_1(\Delta), \ldots, \sigma_p(\Delta))$ — вектор, составленный из элементарных симметрических многочленов от собственных значений матрицы $S(\Delta)$. Тогда если вектор, составленный из собственных значений матрицы Δ_1, не превосходит вектора, составленного из собственных значений матрицы Δ_2, то случайный вектор $X(\Delta_1)$ стохастически не превосходит вектор $X(\Delta_2)$.

Теорема 2. Пусть $S(\Delta) \sim W_p(n, I_p, \Delta)$ — случайная матрица, имеющая нецентральное распределение Уишарта, где Δ — параметр нецентральности. Пусть $l_{max}(\Delta)$ и $l_{min}(\Delta)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы матрицы $S(\Delta)$. Тогда если вектор, составленный из собственных значений матрицы Δ_1, не превосходит вектора, составленного из собственных значений матрицы Δ_2, то случайная величина $l_{max}(\Delta_1)$ стохастически не превосходит $l_{max}(\Delta_2)$, и случайная величина $l_{min}(\Delta_1)$ стохастически не превосходит $l_{min}(\Delta_2)$.

Литература

1. Тюрин Ю.Н. Многомерные статистические модели в геометрическом изложении // Современные проблемы математики и механики, Т. 4, Математика, В.3, Теория вероятностей и математическая статистика, М.:Изд-во МГУ, 2009. С. 107-118.

2. Тюрин Ю.Н. Математическая статистика. Записки лекций. М.:Изд-во МГУ, 2003.

3. Farrel, R. Techniques of Multivariate Calculations // Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1976.

4. Groeneboom, P. and Truax, D.R. A monotonicity property of the power function of multivariate tests // Indag. Math. 2000, 11, p. 209 - 218.

5. Perlman, M.D. and Olkin, I. Unbiasedness of invariant tests for MANOVA and other multivariate problems // Ann. Statist. 1980, 8, p. 1326 - 1341.

6. Richards, D.S.P. Total positivity properties of generalized hypergeometric functions of matrix argument // Journal of Statistical Physics. 2004, 116, p. 907 - 922.

Слова благодарности

Я хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю профессору Ю.Н. Тюрину за постановку задач, ценные замечания и постоянное внимание к моей работе.