Секция «Математика и механика»

О средних значениях некоторых арифметических функций

Мартыненко Дмитрий Романович
Студент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: dmr2@mail.ru

Рассмотрим мультипликативную функцию $\sigma(n)$ – сумму делителей числа n, определяемую на степенях простых чисел формулой:

$$\sigma\left(p^{\alpha}\right)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

Известно, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n}=e^{\gamma},$$

а в предположении верности гипотезы Римана доказана явная оценка

$$\sigma(n)<e^{\gamma}n\ln\ln n$$

для достаточно больших n.

Указанные результаты позволяют предположить, что ряд $\sum\frac{1}{\sigma(n)}$ расходится, поскольку расходится ряд $\sum\frac{1}{n\ln\ln n}$.

Рассмотрим функцию $\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)}$ и, с учётом вышесказанного, найдём асимптотику этой функции при $x\to\infty$. Нахождение асимптотик сумматорных функций является актуальным направлением в исследованиях в теории чисел.

В работе получен следующий результат:

$$\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)}=A_1\ln x+A_2+O\left(\frac{\ln^2 x}{x^{2/3}}\right).$$

Оценка производится методом контурного интегрирования.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту кафедры математического анализа ММФ МГУ к.ф.-м.н. А.В.Бегунцу и аспиранту кафедры математического анализа ММФ МГУ И.С.Тимергалиеву за руководство проводимым исследованием.