

Секция «Математика и механика»

О конфигурациях прямых на плоскости

Шнурников Игорь Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: shnurnikov@yandex.ru

Пусть Γ — конечный набор из $n \geq 2$ различных прямых на вещественной двумерной проективной плоскости. Обозначим через $f(\Gamma)$ число областей — компонент связности дополнения в проективной плоскости к объединению прямых из Γ . Как устроено множество всех возможных чисел $f(\Gamma)$ для фиксированного n и произвольного расположения прямых? Этот вопрос изучали Б. Грюнбаум (1972), Г. Пурди (1980), Н. Мартинов (1990, 1993), В.И. Арнольд (2007) и др. Явная формула для множества чисел $f(\Gamma)$ была получена Н. Мартиновым в [1]. В.И. Арнольд предложил другую схему доказательства формулы Н. Мартинова, в которой ключевую роль играют оценки снизу числа $f(\Gamma)$. К настоящему моменту подход В.И. Арнольда реализован и автором получены оценки числа $f(\Gamma)$ следующего вида.

Теорема 1. Пусть максимальное число прямых из Γ , пересекающихся в одной точке, равно t и $n > t \geq 2$. Тогда

$$f(\Gamma) \geq 2 \frac{n^2 - n + 2t}{t + 3}.$$

Для конфигурации прямых Γ через t_i обозначим число точек пересечения, принадлежащих ровно i прямым для $i = 2, \dots, n$. Совокупность чисел t_2, \dots, t_n до некоторой степени описывает набор прямых Γ . Например, можно найти число областей

$$f(\Gamma) = 1 + \sum_{i=2}^n (i-1)t_i.$$

В свою очередь, числа t_2, \dots, t_n не могут быть произвольными целыми неотрицательными числами. Известен ряд соотношений между числами t_i , которые доказали Е. Мельхиор (1940), П. Эрдош и Г. Пурди (1978), Ф. Хирцебрух (1986), Дж. Сцима и Е. Сойер (1993, 1995) и др. Следующее новое соотношение имеет вид линейного по t_i неравенства типа неравенства Ф. Хирцебруха [2].

Теорема 2. Пусть $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$. Тогда

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geq 8 + \sum_{i \geq 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right)t_i.$$

Литература

1. Martinov N. Classification of arrangements by the number of their cells // Discrete and Comput. Geometry, 1993. V. 9, iss. 1. pp. 39-46.
2. Hirzebruch F. Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers // Contemp. Math., 1986. V. 58. pp. 141-155.