Секция «Математика и механика»

Конструирование движущихся изображений на бесконечных экранах

Титова Елена Евгеньевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: lenbka@mail.ru

Рассмотрим бесконечный вправо экран $S(\mathcal{A})$ — последовательность одинаковых конечных автоматов в двумя входами и одним выходом (элементарных) . Входами каждого автомата являются выходы его левого и правого соседей. Левый вход первого автомата будем называть свободным. Выделим некоторое подмножество состояний элементарного автомата и будем называть его метками. Закон движения для бесконечного экрана — это сверхслово $F \in \{0,1\}^{\infty}$. Изображение — множество меток на экране. Входные последовательности для свободного входа генерирует управляющий автомат $\mathcal{A}_e$. На экране $S(\mathcal{A})$ реализуется движение изображения I^1, состоящего из одной точки, по закону F, если выполняются следующие условия:

1) в некоторый момент времени в самой левой ячейке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть моментом начала движения или началом движения;

2) изменение позиции метки на экране в i-й момент от начала движения соответствует i-й букве в сверхслове F, а именно, если $F(i) = 0$, то в $(i+1)$-й момент метка остается в той же ячейке, где была в текущий момент, если $F(i) = 1$, то в $(i+1)$-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, по сравнению со своим текущим положением;

3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран $S(\mathcal{A})$ — универсальный для изображения I^1 и множества законов движения $\mathcal{F}$, если существует такой управляющий автомат $\mathcal{A}_e$, что при подаче его выходов на свободный вход экрана, на экране формируется изображение I^1, движущееся по любому наперед заданному закону движения F из $\mathcal{F}$. Множество всех таких экранов будем обозначать через $\mathcal{U}(\mathcal{F})$. Если $\mathcal{F} \subseteq \{0,1\}^{\infty}$, то обозначим $Q(\mathcal{F}) = \min_{S\in\mathcal{U}(\mathcal{F})} Q(S)$.
Теорема *Для любого бесконечного экрана $S(\mathcal{A})$ существует такой закон движения $F \in \{0,1\}^{\infty}$, что на экране $S(A)$ невозможно реализовать движение изображения I^1 по закону F.*
Через $\mathcal{F}^{r,d}$ обозначим множество таких законов движения F (сверхслов), в которых начиная с момента $d+1$ не встречается более чем r единиц подряд, $r, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Утверждение *Если $s, d \in \mathbb{N}$, то имеют место следующие оценки* $3 \leq Q(\mathcal{F}^{s,0}) \leq 2s+2$, $3 \leq Q(\mathcal{F}^{s,d}) \leq 2s+9$.
Движение изображения на экране будем называть автономным, если начиная с некоторого момента $t \in \mathbb{N}$, $t < \infty$ на свободный вход экрана не поступает ненулевых значений. Обозначим $\nu_F(t)$ — количество единиц в префиксе длины t закона движения F. Если

для закона движения F существует предел $\lim_{t\to\infty}\frac{\nu_F(t)}{t}$, то будем называть его скоростью движения точки по закону F и обозначать через $v(F)$.
Теорема *Для любого рационального числа a, $0 \le a \le 1$, существует непериодический закон F_a, такой что $v(F_a) = a$ и $\mathcal{U}(\{F_a\}) \ne \varnothing$.*
Скажем, что в законе движения F реализуется скорость $v \in \mathbb{R}$, если существует такая бесконечная возрастающая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \in \mathbb{N}$, что $\lim_{i\to\infty}\frac{\nu_F(t_i)}{t_i} = v$.
Теорема *Существует бесконечный экран $S(\mathcal{A})$, на котором реализуется такой закон движения F изображения I^1, что в F реализуются все скорости v из отрезка $[0,1]$.*
Теорема *Существует автономный бесконечный экран, реализующий для изображения I^1 закон движения с растущим числом идущих подряд нулей и растущим числом идущих подряд единиц.*

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов Москва, "Наука 1985.

2. Abraham Waksman An Optimum Solution to the Firing Squad Synchronization

3. Problem // Information and control 9, 1966, стр.66-78.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю за постановку задачи и научное руководство.