Секция «Математика и механика»

Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов.

Чернавская Екатерина Александровна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: Chernavskayaak@mail.ru

Рассматривается бесконечноканальная система массового обслуживания. Заявки, поступающие на вход системы, образуют дважды стохастический пуассоновский поток(ДСПП) $A(t)$, который определяется с помощью случайной замены времени :

$$A(t) = A^*(\Lambda(t))$$

где $\{A^*(t), t \geq 0\}$– стандартный пуассоновский процесс, а $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$–стохастический процесс, не зависящий от $A^*(t)$, который имеет неубывающие непрерывные справа траектории и значения в $\mathbb{R}$, $\Lambda(0) = 0$.

Условие 1. *Ведущая функция* $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(y,\omega)dy$, *где* $\lambda(y)$– *неотрицательный ограниченный с вероятностью 1 стационарный случайный процесс такой, что*

$$|r(x)| = |cov(\lambda(0), \lambda(x))| \leq \{\ c_0\&\ \text{для}\ 0c_0x^{-\alpha}\&\ \text{для}\ x \geq a.$$

Здесь c_0, a– *некоторые положительные постоянные,* $\alpha > 0$.
Обозначим $E\lambda(t) = \lambda$.
Процесс $\Lambda(t)$ называется ведущим процессом, а $\lambda(t)$ интенсивностью дважды стохастического пуассоновского процесса $\{A(t), t \geq 0)\}$. Времена обслуживания заявок представляют собой последовательность $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин(н.о.р.с.в.) с функцией распределения $B(x)$. Обозначим $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.
Условие 2. *Существуют положительные постоянные* c_1, c_2, t_0 *такие, что*

$$c_1 t^{-\Delta} \leq \overline{B}(x) \leq c_2 t^{-\Delta},\ 0 < \Delta < 1, \tag{2}$$

при всех $t \geq t_0$. Из (**??**) следует, что $\int_0^\infty x dB(x) = \infty$. Основное внимание в данной работе направлено на изучение процесса $q(t)$, который представляет собой число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент времени t. Пользуясь свойствами ДСПП, можно получить формулу для распределения вероятностей $q(t)$ при любом фиксированном t имеем

$$P(q(t) = k) = E\left(e^{-\rho(t)}\frac{(\rho(t))^k}{k!}\right), \tag{3}$$

где $\rho(t) = \int_0^t \overline{B}(t-x)\lambda(x)dx$. Условия 1 и 2 позволяют найти оценки для $E\rho(t)$ и $D\rho(t)$

$$\lambda c_1 t^{1-\Delta} \leq E\rho(t) \leq \lambda c_2 t^{1-\Delta}. \tag{4}$$

Оценка для $D\rho(t)$ следует из следующей леммы.

Лемма 1 *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для любых* $0 < \gamma < 1$, $\delta > 0$ *найдется положительная константа* C *такая, что при достаточно больших* t *выполнено следующее неравенство*

$$\frac{D\rho(t)}{C} \leq t^{\gamma+\delta} + t^{1+\gamma-\alpha} \ln t + t^{\delta(\alpha-1)+\gamma} \ln t + t^{\delta(\alpha-1)+1-2\Delta} \ln t. \quad (5)$$

Благодаря этим оценкам становится возможным доказательство следующих предельных теорем. Обозначим $\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x)dx$, тогда $E\rho(t) = \lambda\beta(t)$.

Теорема 1 *Если выполнены условия 1, 2 и* $\alpha > \Delta$, *то имеет место сходимость по распределению при* $t \to \infty$ *величины* $q^*(t) = \frac{q(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$ *к нормально распределенной случайной величине, с параметрами (0,1).*

Теорема 2 *Если выполнены условия 1, 2 и* $\alpha > 2\Delta - 1$, *то величина* $q^*(t) = \frac{q(t)}{\lambda\beta(t)}$ *сходится по вероятности к 1, при* $t \to \infty$.

Литература

1. Kaplan N. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue.*The Annals of Probability 1975, Vol.3,No.5, 780-789*

2. Grandell J. (1976). Doubly stochastic Poisson process. *Lecture Notes in Mathematics, 529:1-276.*

3. Федорюк М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды.*-М.: Наука,544 с.(1987)

Слова благодарности

Выражаю глубокую благодарность Баштовой Елене Евгеньевне и своему научному руководителю Афанасьевой Ларисе Григорьевне.