Секция «Математика и механика»

Эволюция случайных множество под воздействием локальных факторов

Тужилина Елена Алексеевна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: elena.tuzhilina@mail.ru

Изучаются модели, описывающие взаимодействие клеток органов или тканей (см., например, [1]). Рассмотрим случайное выпуклое компактное множество $A^{(0)}$ на плоскости (см., например, [2], с. 20–21). В случае линейной модели для каждого выпуклого компакта $A^{(0)}$ зададим функцию начальной степени поражения тканей $f^{(0)} = \mathbb{I}_{A^{(0)}}(x)$, где $\mathbb{I}_A(x)$ — индикатор множества A, и неотрицательную функцию $g(x)$, для которой $\int_{\mathbb{R}^2} g(x)\ dx = 1$. В качестве функции $g(x)$ можно взять плотность двумерного случайного вектора, например, стандартного нормального. На n-ом шаге степень поражения (ткани) в каждой точке плоскости задается интегралом свертки

$$f^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f^{(n-1)}(y) g(x-y)\ dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Теорема 1 Функции $f^{(n)}$, определенные в (1), с вероятностью единица поточечно сходятся к нулю при $n \to \infty$.

Гораздо больший интерес представляет нелинейная модель. Зафиксируем $r \in \mathbb{R}_+$ и $0 \le K \le 1$. Для любой точки x плоскости определим значение функции

$$P_r^{(n)}(x) = \frac{\mu(B(x,r) \cap A^{(n)})}{\mu(B(x,r))},$$

где μ — мера Лебега, $B(x,r)$ — круг радиуса r с центром в точке x. На каждом шаге вместо степени поражения каждой клетки будем менять само множество следующим образом:

$$A^{(n)}(r,K) = \{x \in \mathbb{R}^2 : P_r^{(n-1)}(x) \ge K\}.$$

Теорема 2 Для описанной модели последовательность компактов $A^{(n)}$ сходится в метрике Хаусдорфа с вероятностью единица при $n \to \infty$ либо к точке, либо заполняет всю плоскость.

Литература

1. Булинский А.В. Стохастические модели в радиобиологии // Труды международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего, Сер. Современные проблемы математики, механики и их приложений. Москва. С. 69–76.

2. Molchanov I., Theory of Random Sets // Springer, 2005.